
INTRODUCTION AUX PROBABILITÉS
Série 4

Exercice 1. Considérons le problème du cours où une personne choisit une pièce parmi les trois types suivants : ou bien les deux côtés de la pièce sont des pile, ou bien les deux côtés sont des face, ou bien la pièce est normale. Supposons ensuite que la personne lance la pièce choisie n fois, chaque lancer étant indépendant des précédents. Décrire avec soin l'espace probabilisé correspondant à cette situation, et donner les probabilités conditionnelles correspondant à chaque type de pièce sachant le résultat des n lancers. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

Exercice 2. À la fin du printemps 2020, on utilisait des tests sérologiques pour détecter la présence d'anticorps contre le SARS-CoV-2, et savoir ainsi si la personne était immunisée contre le virus au moment du test ou non. La précision de ces tests était bonne, à savoir de 95%. Ainsi, les faux négatif (le test est négatif alors que la personne a des anticorps) ne concernaient que 5% des tests négatifs effectués, et de même les faux positifs (le test est positif alors que la personne n'a pas d'anticorps) ne concernaient que 5% des tests positifs effectués. Cependant, malgré ces chiffres, le résultat du test était à interpréter avec soin. Essayons de comprendre pourquoi :

- Vous entendez une personne affirmer que si son test est positif, alors elle a 95% de chances d'avoir des anticorps. Est-ce correct ?
- Considérons maintenant l'information additionnelle suivante : à la fin du printemps 2020, on a estimé qu'environ 5% de la population avait été en contact avec le SARS-CoV-2. Quel espace probabilisé considèreriez-vous maintenant pour calculer la probabilité d'avoir des anticorps sachant qu'on a fait un test positif ? Que vaut cette probabilité ? Que se passe-t-il si vous faites deux tests indépendants le même jour et que les deux sont positifs ?
- Supposons maintenant que 50% de la population ait été en contact avec le SARS-CoV-2. Que devient le résultat précédent ?

Exercice 3. [Indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement] Considérons l'espace probabilisé correspondant au lancer de deux pièces équilibrées. Soit E_1 l'évènement : "la première pièce renvoie pile", soit E_2 l'évènement : "la deuxième pièce renvoie pile", et soit E_3 l'évènement : "les deux pièces renvoient la même chose". Montrer que E_1 , E_2 et E_3 sont indépendants deux-à-deux mais pas mutuellement.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient E_1, E_2, E_3 des évènements deux-à-deux indépendants et de probabilité strictement positive. Montrer que si E_1 et E_2 sont conditionnellement indépendants sachant E_3 , alors E_1, E_2, E_3 sont mutuellement indépendants.

Exercice 5. Considérons l'espace probabilisé correspondant à un entier aléatoire uniforme dans $\{1, 2, \dots, n\}$. Soient $p_1, p_2, \dots, p_k$ des nombres premiers deux-à-deux distincts tels que $p_i \mid n$ pour tout $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Soit E_i l'évènement : " p_i divise notre entier aléatoire uniforme". Est-il vrai que les E_i sont deux-à-deux indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ? Que se passe-t-il si l'on considère des nombres premiers p qui ne divisent pas nécessairement n ?

Exercice 6. [Indépendance, premières propriétés] Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Montrer les propriétés suivantes.

- Si E est un évènement presque sûr, i.e, tel que $\mathbb{P}(E) = 1$, alors E est indépendant de tous les autres évènements.
- Si E, F sont des évènements indépendants, alors $\Omega \setminus E$ et F sont indépendants. En particulier, n'importe quel évènement négligeable E , i.e, tel que $\mathbb{P}(E) = 0$, est indépendant de tous les autres évènements.
- Enfin, si un évènement E est indépendant de lui-même, alors $\mathbb{P}(E) \in \{0, 1\}$.

0.1 ★ Pour le plaisir (non-examinable) ★

Exercice 7. [★ maximum d'une marche aléatoire] Soit $(S_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ une marche aléatoire simple, et soit $M_n = \max_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} S_k$ son maximum. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(M_n \geq h) = 2\mathbb{P}(S_n > h) + \mathbb{P}(S_n = h).$$